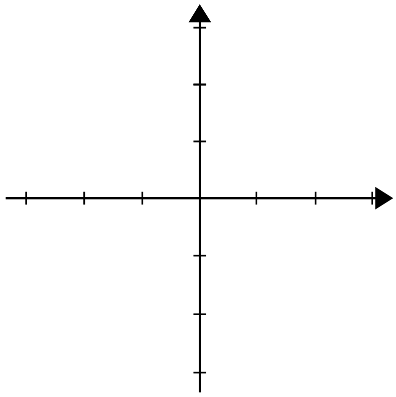
05 Nombres complexes et trigonométrie

05-01 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ.

- $\arg(-z) = \theta + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\theta\ [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$



Remarques

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.
- Si A et B sont deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B, alors $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ.

On appelle **forme trigonométrique** de z l'écriture $\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$.

Exemples

La forme trigonométrique de (1 + i) est $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

La forme trigonométrique de (-1) est $\cos\pi + i\sin\pi$.

Propriétés

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π.

Remarque

Le fait d'avoir $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n'entraîne pas forcément que $\arg(z) = \alpha\ [2\pi]$. Il manque la condition $r > 0$.

Exemple

On a $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et on peut écrire $1 + i = -\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

05-01 Applications du cours

Application 1

Dans chaque cas, écrire le nombre complexe z sous sa forme trigonométrique.

a] $z = 2\text{i}$

b] $z = 5 - 5\text{i}$

c] $z = -2 - 2\text{i}\sqrt{3}$

d] $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{12} - \text{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$

e] $z = 4\left(\sin\frac{\pi}{3} + \text{i}\cos\frac{\pi}{3}\right)$

Application 2

Déterminer un argument en radian, arrondi au centième, des nombres complexes suivants.

a] $z = 1 + 2\text{i}$

b] $z = 4 - 3\text{i}$

c] $z = -2 + 5\text{i}$

d] $z = -\frac{1}{4} - 4\text{i}$

Application 3

Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives :

$z_A = 1 + \text{i}$ $\qquad z_B = 3 + \text{i}\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$ $\qquad z_C = 1 + \sqrt{3}$

1. Déterminer l'affixe des points M et N tels que :

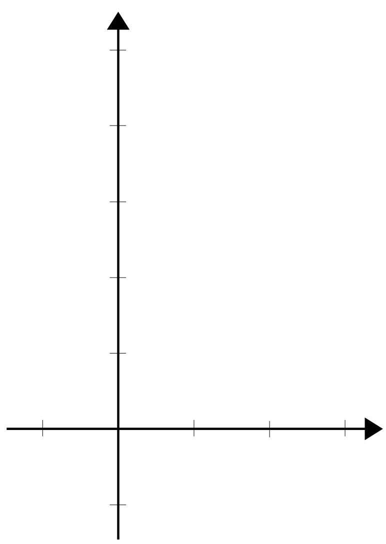
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AC}$.

2. Déterminer un argument des affixes de M et N.

3. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

Application 4

Soient A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_B = 2\text{i}$.



1. **a]** Déterminer la forme trigonométrique de z_A et z_B.
b] Placer A et B avec précision sur la figure ci-contre.

2. Soit F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
a] Placer F sur la figure.
b] Déterminer la nature précise de $OAFB$.

3. **a]** Déterminer $\widehat{AOF}$ et en déduire un argument de z_F .
b] Montrer que le module de z_F est égal à $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.
c] Écrire la forme trigonométrique de z_F .

4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.